SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





ARITMÉTICA

Tema: MCD y MCM

Docente: Ramiro Díaz Vásquez

OBJETIVOS

1. Estudiar las definiciones del MCD y MCM; para aplicarlo en la resolución de problemas.

2. Estudiar los métodos para determinar el MCD y MCM.

3. Estudiar y aplicar las propiedades obtenidas a partir de las definiciones del MCD y MCM.

INTRODUCCIÓN



En muchas ocasiones nos encontramos en la necesidad de cercar un terreno usando estacas igualmente espaciadas y en la menor cantidad posible con la finalidad de ahorrar costos.



En otras ocasiones, resulta útil saber cuando coinciden 2 trenes que salen con diferentes frecuencias, o cuando debemos tomar dos medicamentos juntos los cuales se toman a intervalos diferentes.

En todos estos casos la aplicación correcta del MCD o del MCM nos permitirá determinar los valores que estamos buscando, por lo que su conocimiento resulta importante.

Máximo Común Divisor (MCD):

Como su nombre indica, el MCD de un grupo de números, es el mayor divisor que dichos número tienen en común.

Ejemplo:

Divisores

30: 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30

42: 1; 2; 3; 6; 7; 14; 28; 42

Divisores comunes:

1; 2; 3; 6

Mayor

Por tanto:

$$MCD(30; 42) = 6$$

Esto ocurre porque: $30 = 6 \times 5$ $\quad 42 = 6 \times 7$

PESI

Se observa que:

- Los divisores comunes al grupo de números son los divisores del MCD.
- El MCD está contenido en cada uno de los números.

Aplicación 1:

Si se sabe que el MCD de tres números es 48, determine la suma de los divisores comunes de estos tres números.

Resolución:

Piden: La suma de los divisores comunes

Sea: $MCD(A; B; C) = 48$

Recordemos que los divisores comunes de un grupo de números son los divisores del MCD, por lo que esto se puede aplicar también a la suma de divisores.

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$SD(48) = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 31 \times 4$$

$$SD(48) = 124$$

Respuesta: 124

Mínimo Común Múltiplo (MCM):

Como su nombre indica, el MCM de un grupo de números, es el menor múltiplo que dichos número tienen en común.

Ejemplo:

Múltiplos

30: 30; 60; 90; 120; 150; 180; 210; 240; 270; ...

45: 45; 90; 135; 180; 225; 270; 315; ...

Múltiplos comunes: 90; 180; 270; ...

Menor

Por tanto:

$$MCM(30;45) = 90$$

Además:

$$90 = 30 \times 3 \qquad 90 = 45 \times 2$$

Se observa que:

- Los múltiplos comunes al grupo de números son múltiplos del MCM.
- El MCM contiene a cada uno de los números.

Aplicación 2:

Si se sabe que el MCM de dos números es 120, determine el primer múltiplo común de cuatro cifras que poseen estos dos números.

Resolución:

Piden: El primer múltiplo común de 4 cifras.

Sea: $MCM(A;B) = 120$

Luego: $\overline{abcd} = 120k$

k → 9

$$\overline{abcd} = 120 \times 9 = 1080$$

Respuesta: 1080

MÉTODOS DE CÁLCULO PARA EL MCD Y MCM:

a) Por descomposición simultánea:

- Para el MCD se procede a determinar todos los factores comunes que puedan tener los números, hasta conseguir valores PESI.
- Para el MCM se procede a determinar primero todos los factores comunes que puedan tener los números y luego se continua con aquellos que no son comunes hasta obtener la unidad para cada número.

Ejemplos:

Determinar el MCD de 40; 60 y 120

$$\begin{array}{ccccc|c} 40 & - & 60 & - & 120 & 2 \\ 20 & - & 30 & - & 60 & 2 \\ 10 & - & 15 & - & 30 & 5 \\ 2 & - & 3 & - & 6 & \end{array}$$

$\underbrace{2 - 3 - 6}_{\text{PESI}}$

$$MCD(40; 60; 120) = 2 \times 2 \times 5 = 20$$

Determinar el MCM de 40; 60 y 120

$$\begin{array}{ccccc|c} 40 & - & 60 & - & 120 & 2 \\ 20 & - & 30 & - & 60 & 2 \\ 10 & - & 15 & - & 30 & 5 \\ 2 & - & 3 & - & 6 & 3 \\ 2 & - & 1 & - & 2 & 2 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

$$MCM(40; 60; 120) = 2^3 \times 5 \times 3 = 120$$

b) Por descomposición canónica:

- Para el MCD se procede a extraer todos los factores primos comunes de las D.C. con el menor exponente con el que se encuentren escritos.
- Para el MCM se procede a extraer todos los factores primos (comunes y no comunes) con el mayor exponente con el que se encuentren escritos.

Ejemplos:

Determinar el MCD de 40; 60 y 120

$$40 = 2^3 \times 5$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$MCD(40; 60; 120) = 2^2 \times 5 = 20$$

Determinar el MCM de 40; 60 y 120

$$40 = 2^3 \times 5$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

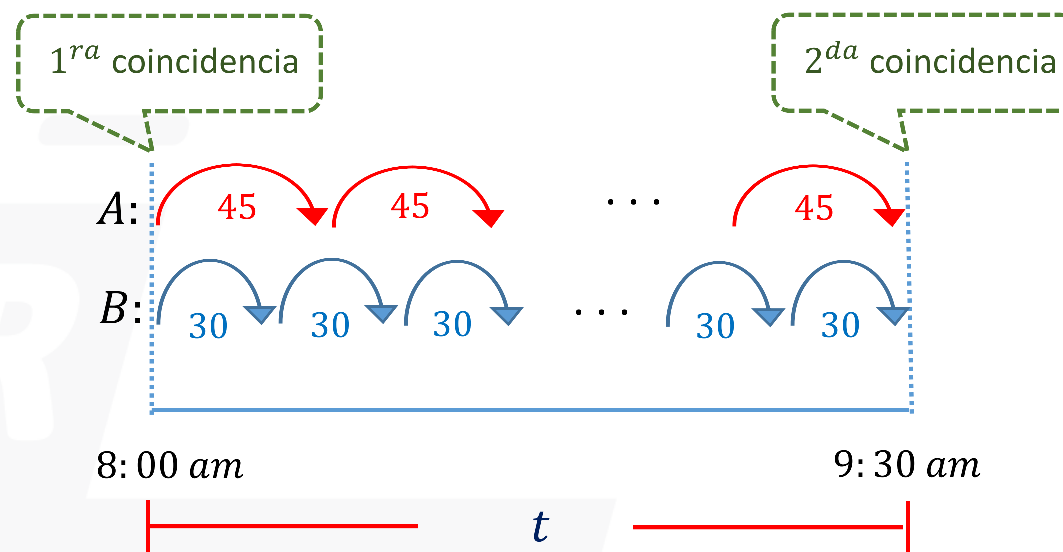
$$MCM(40; 60; 120) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$$

Aplicación 3:

En el aeropuerto Jorge Chávez, hay dos líneas aéreas que realizan vuelos a Cartagena. Una de las líneas realiza vuelos cada 45 minutos y la otra cada 30 minutos. Si a las 8:00 a.m. coinciden en la hora de despegue por primera vez, ¿a qué hora volverán a coincidir en la hora de despegue?

Resolución:

Piden: La hora a la que ocurrirá la 2da coincidencia.



Se observa que el tiempo debe ser múltiplo de 45 y 30.

$$t = MCM(45; 30) = 90$$

Ver el ejemplo de MCM en donde se determinó el MCM de estos dos valores.

Luego:

$$8{:}00\ a.m. + 90\ minutos = 9{:}30\ a.m.$$

Respuesta: 9:30 a.m.

c) Por divisiones sucesivas (Algoritmo de Euclides) :

(Solo para el MCD de 2 números)

Ejemplo:

Calcular el MCD de 128 y 296

	2	3	5
296	128	40	8
	40	8	0

Luego el $MCD(128; 296)$ es: 8

Obsérvese que al ser divisiones inexactas (salvo la última), estas pueden ser realizadas por defecto o por exceso.

Aplicación 4:

Se tienen 2 números A y B. Al calcular el $MCD(A; B)$ por el algoritmo de Euclides se obtuvo los cocientes 1, 3 y 4. Halle el menor de dichos números, si se sabe que se cumple $A + B = 1350$.

Resolución:

Piden: El menor de los números

Asumiendo que: $MCD(A; B) = d$

	1	3	4
$A = 17d$	$B = 13d$	$4d$	d
	$4d$	d	0

Entonces:

$$A + B = 1350$$
$$17d + 13d = 1350$$
$$30d = 1350$$
$$d = 45$$

$$B = 13(45)$$
$$= 585$$

Respuesta: 585

Propiedades del MCD y MCM:

Para solo dos números:

Sean los números: $A = d \times p$ $B = d \times q$

Donde se cumple que: p y q son PESI

Entonces: $MCD(A;B) = d$

$MCM(A;B) = d \times p \times q$

Además, se cumple:

$$MCD(A;B) \times MCM(A;B) = A \times B$$

Si A y B son dos números PESI:

$MCD(A;B) = 1$ $MCM(A;B) = A \times B$

Para dos o más números:

Sean: $MCD(A;B;C) = d$ $MCM(A;B;C) = m$

Entonces:

$MCD(nA;nB;nC) = nd$ | $MCM(nA;nB;nC) = nm$

$MCD\left(\frac{A}{k};\frac{B}{k};\frac{C}{k}\right) = \frac{d}{k}$ | $MCM\left(\frac{A}{k};\frac{B}{k};\frac{C}{k}\right) = \frac{m}{k}$

$MCD(A^\alpha;B^\alpha;C^\alpha) = d^\alpha$ | $MCM(A^\alpha;B^\alpha;C^\alpha) = m^\alpha$

Donde: $n \in \mathbb{Z}^+$ $k \in \mathbb{Z}^+$ $\alpha \in \mathbb{Q}^+$

Solo para el MCD:

Sean: $A = k^\alpha - 1$ $B = k^\beta - 1$ $C = k^\theta - 1$

Entonces: $MCD(A;B;C) = k^{MCD(\alpha;\beta;\theta)} - 1$

Aplicación 5:

Si $MCD(n-1\,;n+1\,;n)=n-33$; determine la suma de cifras de n.

Resolución:

Piden: la suma de cifras de n.

Sabemos que:

$\boldsymbol{n-1}$; $\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{n+1}$ por ser consecutivos son **PESI**.

Propiedad:

$$MCD(n-1\,;n+1\,;n)=\underbrace{n-33}_{1}$$

$$\rightarrow \quad n=34$$

Por lo tanto, la suma de cifras de n es 7

Respuesta: 7

Aplicación 6:

Sean $A=\underbrace{333\ldots3_7}_{20\text{ cifras}}$ y $B=\underbrace{333\ldots3_7}_{30\text{ cifras}}$

Calcular la suma de cifras del MCD de A y B al ser expresado en la base 7

Resolución:

Piden: calcular la suma de cifras del MCD(A,B)

Sea:

$$H=MCD(A,B)$$

$$2H=MCD(2A,2B)$$

$$2H=MCD(\underbrace{66\ldots6_7}_{20\text{ cifras}},\underbrace{66\ldots6_7}_{30\text{ cifras}})$$

$$2H=MCD(7^{20}-1,7^{30}-1)$$

$$2H=7^{10}-1$$

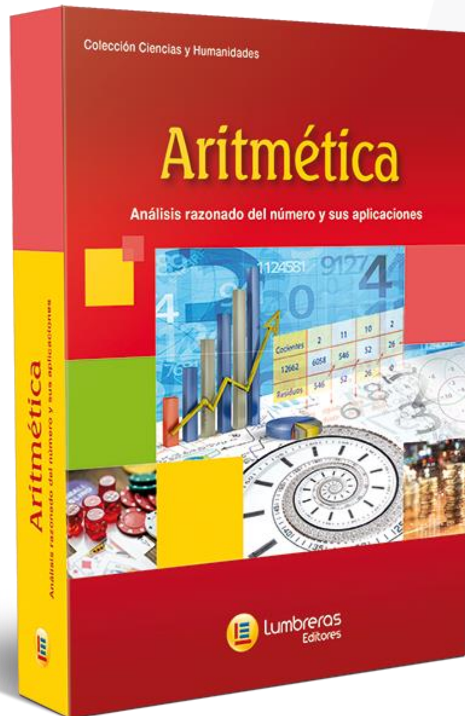
$$2H=\underbrace{666\ldots6_7}_{10\text{ cifras}}$$

$$H=\underbrace{333\ldots3_7}_{10\text{ cifras}}$$

Por lo tanto, la suma de cifras es 30

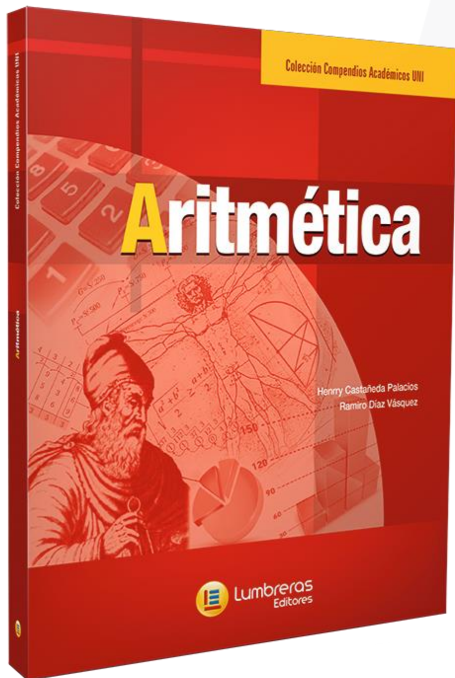
Respuesta: 30

COLECCIÓN CIENCIAS Y HUMANIDADES



- Indispensable para profundizar el conocimiento de la aritmética.
- Su estructura presenta objetivos, introducción en cada tema, teoría amplia y desarrollada con ejemplos y aplicaciones, preguntas resueltas y preguntas propuestas tipo examen de admisión.

COLECCIÓN COMPENDIOS ACADÉMICOS UNI



- Estos libros le ayudarán a consolidar sus conocimientos con los temas más frecuentes en exámenes de admisión.
- Su estructura presenta teoría resumida y didáctica, problemas propuestos y sección de claves.

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe